

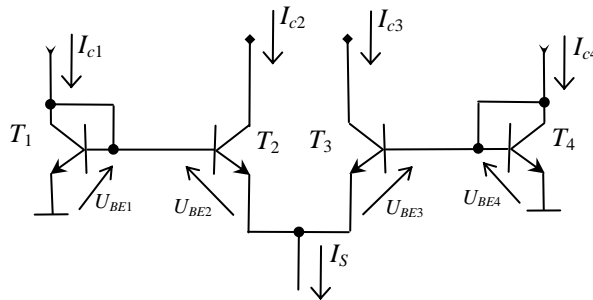
**„EUROELEKTRA”  
OLIMPIADA ELEKTRYCZNA I ELEKTRONICZNA  
Rok szkolny 2007/2008 – Etap drugi - Grupa elektroniczno-telekomunikacyjna**

Zestaw zawiera 5 zadań. Wszystkie zadania są jednakowo punktowane. Czas rozwiązywania - 120 minut.

**ZADANIA**

**Zad. 1**

W układzie jak na rysunku, nazywanym układem mnożącym Gilberta, prądy wyjściowe ( $I_{c2}, I_{c3}$ ) są związane z prądami wejściowymi ( $I_{c1}, I_{c4}$ ) wzorem (2), a ponadto z prądem sterującym ( $I_S$ ) wzorami (3) i (4). Pokaż, że wzory te są prawdziwe przy założeniu, że wszystkie cztery tranzystory mają identyczne właściwości, pracują w zakresie aktywnym i zależność prądu kolektora ( $I_c$ ) od napięcia baza emiter ( $U_{BE}$ ) tranzystora jest dana wzorem (1), w którym  $A$  i  $U_T$  są współczynnikami.



$$I_c \cong Ae^{\frac{U_{BE}}{U_T}} \quad (1)$$

$$I_{c1}I_{c3} = I_{c2}I_{c4} \quad (2)$$

$$I_{c2} = \frac{I_{c1}I_S}{I_{c1} + I_{c4}} \quad (3)$$

$$I_{c3} = \frac{I_{c4}I_S}{I_{c1} + I_{c4}} \quad (4)$$

**Zad. 2**

Na rys. A przedstawiono wzmacniacz zbudowany z wykorzystaniem wzmacniacza operacyjnego typu CFA (Current Feedback Amplifier). Rys. B przedstawia makromodel samego wzmacniacza CFA, składający się ze sterowanego prądem źródła napięcia wyjściowego i wtórnika napięciowego na wejściu. Wydajność wyjściowego źródła napięciowego jest kontrolowana za pomocą prądu  $I_N$  zgodnie ze wzorem  $V_{out} = Z_T I_N$ , w którym  $I_N$  jest prądem wypływającego z wejścia odwracającego wzmacniacza CFA (wejście „-”). Wtórnik napięciowy jest natomiast włączony między wejście nieodwracające i odwracające wzmacniacza CFA, co oznacza, że  $V^- = V^+$ , rezystancja widziana z wejścia „+” jest bardzo duża, a z wejścia „-” bardzo mała.

Oblicz wzmocnienie napięciowe  $A_V = V_{out}/V_{in}$  oraz 3-dB częstotliwość graniczną ( $f_{3dB}$ ) wzmacniacza z rys. A przyjmując, że transimpedancja  $Z_T$ , charakteryzująca właściwości transmisyjne wzmacniacza CFA, jest opisana wzorem (1), gdzie  $j = \sqrt{-1}$  jest zmienną urojoną,  $f$  częstotliwością,  $R_T$  transrezystancją, a  $f_g$  3-dB częstotliwością graniczną wzmacniacza CFA.

$$Z_T = \frac{R_T}{1 + j \frac{f}{f_g}} \quad (1)$$

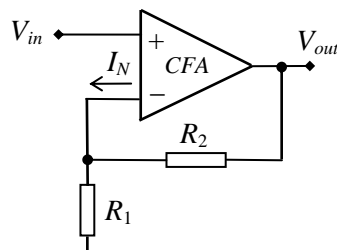
**Dane:**

- $R_1 = 500\Omega$
- $R_2 = 20k\Omega$
- $R_T = 10M\Omega$
- $f_g = 10kHz$

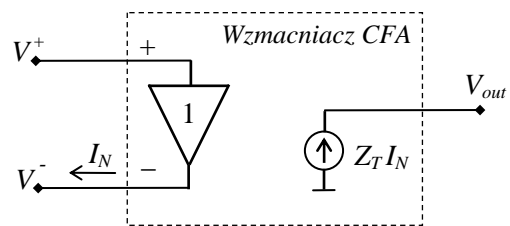
**Szukane:**

$$A_V = \frac{V_{out}}{V_{in}} = ?$$

$$f_{3dB} = ?$$



**Rys. A**



**Rys. B**

**Zad. 3.**

Sygnal analogowy o postaci

$$x(t) = 2 + 2\sin(5 \cdot 10^3 \pi t) + \sin(10^4 \pi t)$$

ma być przekształcony na postać cyfrową i przesłany torem o przepływności  $64 \cdot 10^3$  symboli na sekundę ( $64 \cdot 10^3$  body). Ile maksymalnie bitów można przeznaczyć na zakodowanie każdej próbki tego sygnału, jeżeli oprócz kodowania wartości próbek zastosuje się dodatkowo kodowanie 2B1Q w celu zamiany otrzymanego sygnału binarnego na czterowartościowy?

**Zad. 4**

W układzie pokazanym na rysunku blok o wzmocnieniu  $A$  przedstawia idealny wzmacniacz napięciowy. Cały układ jest natomiast wzmacniaczem transimpedancyjnym. Oblicz rezystancję wejściową  $R_{in} = u_{in} / i_{in}$  dla sygnałów zmiennych, traktując kondensator  $C$  jako zwarcie dla tych sygnałów oraz przyjmując, że tranzystor MOS pracuje w zakresie silnej inwersji, a jego przejściowa charakterystyka statyczna, opisującą zależność prądu drenu  $I_D$  od napięcia bramka-źródło  $U_{GS}$ , jest dana wzorem (1), w którym  $K$  jest współczynnikiem, a  $U_p$  napięciem odcięcia kanału.

$$I_D \cong K(U_{GS} - U_p)^2 \tag{1}$$

**Dane:**

$$K = 2,5 \times 10^{-2} \text{ A/V}$$

$$U_p = 1 \text{ V}$$

$$U_B = 1,2 \text{ V}$$

$$I = 1 \text{ mA}$$

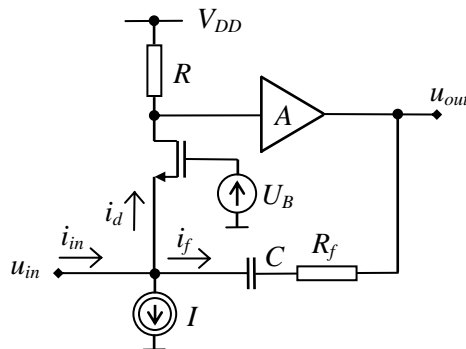
$$A = -10 \text{ V/V}$$

$$R = 1 \text{ k}\Omega$$

$$R_f = 200 \Omega$$

**Szukane:**

$$R_{in} = \frac{u_{in}}{i_{in}} = ?$$



**Zad. 5.**

Charakterystyka przejściowa,  $T = V_{out} / V_{in}$ , układu z rys. A jest pokazana na rys. B. Oblicz szerokość pętli histerezy  $V_h$  tej charakterystyki. Przyjąć, że użyty wzmacniacz operacyjny jest układem idealnym.

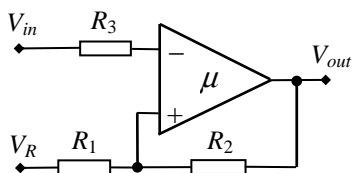
**Dane:**

$$V_R = 6 \text{ V}$$

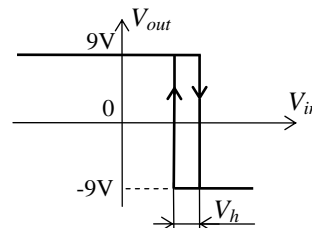
$$R_1 = 1 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 9 \text{ k}\Omega$$

$$R_3 = 1 \text{ k}\Omega$$



Rys. A



Rys. B

**Opracowali :**

*Dr hab. inż. Felicja Wysocka-Schillak*

*Dr hab. inż. Ryszard Wojtyna*

*prof. nadzwyczajny UTP*

**Sprawdzili:**

*Dr inż. Andrzej Borys*

*Dr inż. Jarosław Majewski*

**Zatwierdził:**

*Przewodniczący Rady Naukowej*

*Olimpiady „EUROELEKTRA”*

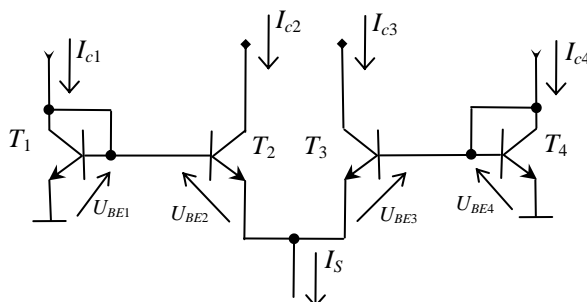
*Dr hab. inż. Ryszard Wojtyna*

*prof. nadzwyczajny UTP*

**„EUROELEKTRA”**  
**OLIMPIADA ELEKTRYCZNA I ELEKTRONICZNA – rozwiązania**  
Rok szkolny 2007/2008 - Etap drugi– grupa elektroniczno-telekomunikacyjna

**Zad. 1**

W układzie jak na rysunku, nazywanym układem mnożącym Gilberta, prądy wyjściowe ( $I_{c2}, I_{c3}$ ) są związane z prądami wejściowymi ( $I_{c1}, I_{c4}$ ) wzorem (2), a ponadto z prądem sterującym ( $I_S$ ) wzorami (3) i (4). Pokaż, że wzory te są prawdziwe przy założeniu, że wszystkie cztery tranzystory mają identyczne właściwości, pracują w zakresie aktywnym i zależność prądu kolektora ( $I_c$ ) od napięcia baza-emiter ( $U_{BE}$ ) tranzystora jest dana wzorem (1), w którym  $A$  i  $U_T$  są współczynnikami.



$$I_c \cong A e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} \quad (1)$$

$$I_{c1} I_{c3} = I_{c2} I_{c4} \quad (2)$$

$$I_{c2} = \frac{I_{c1} I_S}{I_{c1} + I_{c4}} \quad (3)$$

$$I_{c3} = \frac{I_{c4} I_S}{I_{c1} + I_{c4}} \quad (4)$$

**Rozwiązanie**

Dla pokazanego układu suma wszystkich napięć baza-emiter jest równa zero, co można zapisać w postaci:

$$U_{BE1} - U_{BE2} + U_{BE3} - U_{BE4} = 0 \quad (5)$$

Z podanego w treści zadania wzoru (1) otrzymuje się następującą funkcję odwrotną:

$$U_{BE} \cong U_T \ln \frac{I_c}{A} = U_T \ln I_c - U_T \ln A \quad (6)$$

Składnik  $U_T \ln A$  w równaniu (6) przyjmuje identyczne wartości dla wszystkich czterech tranzystorów. Wykorzystując wzór (6) do przedstawienia napięć  $U_{BE1}$ ,  $U_{BE2}$ ,  $U_{BE3}$  i  $U_{BE4}$  można równanie (5) napisać w postaci:

$$U_T \ln I_{c1} + U_T \ln I_{c3} = U_T \ln I_{c2} + U_T \ln I_{c4} \quad (7)$$

Dzieląc to równanie stronami przez  $U_T$  i stosując wzór na logarytm iloczynu otrzymuje się równanie:

$$\ln I_{c1} I_{c3} = \ln I_{c2} I_{c4}, \quad (8)$$

które prowadzi do zależności:

$$I_{c1} I_{c3} = I_{c2} I_{c4}, \quad (9)$$

**co należało udowodnić.**

Traktując prądy bazy jako dużo mniejsze od prądów kolektora, z rysunku widać, że:

$$I_{c2} + I_{c3} \cong I_S \quad (10)$$

W rezultacie równanie (9) można napisać w postaci:

$$I_{c1} (I_S - I_{c2}) = I_{c2} I_{c4}, \quad (11)$$

$$\text{albo w postaci: } I_{c1} I_{c3} = (I_S - I_{c3}) I_{c4} \quad (12)$$

Wyznaczając z równania (11)  $I_{c2}$  otrzymuje się zależność:

$$I_{c2} = \frac{I_{c1} I_S}{I_{c1} + I_{c4}}, \quad (13)$$

**co należało udowodnić.**

a z równania (12)  $I_{c3}$  otrzymuje się zależność:

$$I_{c3} = \frac{I_{c4} I_S}{I_{c1} + I_{c4}}, \quad (14)$$

**co należało udowodnić.**

**Zad. 2**

Na rys. A przedstawiono wzmacniacz zbudowany z wykorzystaniem wzmacniacza operacyjnego typu CFA (Current Feedback Amplifier). Rys. B przedstawia makromodel samego wzmacniacza CFA, składający się ze sterowanego prądem źródła napięcia wyjściowego i wtórnika napięciowego na wejściu. Wydajność wyjściowego źródła napięciowego jest kontrolowana za pomocą prądu  $I_N$  zgodnie ze wzorem  $V_{out} = Z_T I_N$ , w którym  $I_N$  jest prądem wypływającego z wejścia odwracającego wzmacniacza CFA (wejście „-”). Wtórnik napięciowy jest natomiast włączony między wejście nieodwracające i odwracające wzmacniacza CFA, co oznacza, że  $V^- = V^+$ , rezystancja widziana z wejścia „+” jest bardzo duża, a z wejścia „-” bardzo mała.

Oblicz wzmocnienie napięciowe  $A_V = V_{out}/V_{in}$  oraz 3-dB częstotliwość graniczną ( $f_{3dB}$ ) wzmacniacza z rys. A przyjmując, że transimpedancja  $Z_T$ , charakteryzująca właściwości transmisyjne wzmacniacza CFA, jest opisana wzorem (1), gdzie  $j = \sqrt{-1}$  jest zmienną urojoną,  $f$  częstotliwością,  $R_T$  transrezystancją, a  $f_g$  3-dB częstotliwością graniczną wzmacniacza CFA.

$$Z_T = \frac{R_T}{1 + j \frac{f}{f_g}} \quad (1)$$

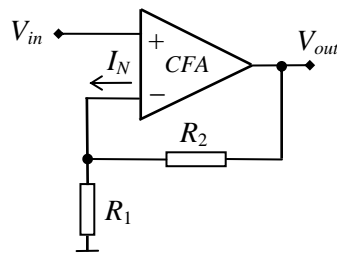
**Dane:**

- $R_1 = 500\Omega$
- $R_2 = 20k\Omega$
- $R_T = 10M\Omega$
- $f_g = 10kHz$

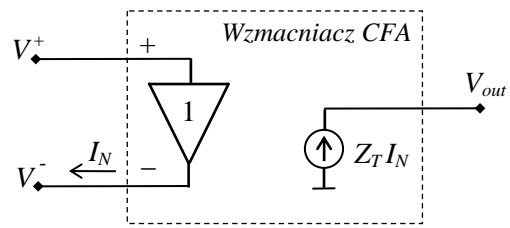
**Szukane:**

$$A_V = \frac{V_{out}}{V_{in}} = ?$$

$$f_{3dB} = ?$$



Rys. A



Rys. B

**Rozwiązanie**

Uwzględniając fakt, że  $V^- = V^+$ , że rezystancja wejścia „-” wzmacniacza CFA jest pomijalnie mała oraz stosując zasadę superpozycji można prąd  $I_N$  przedstawić jako funkcję napięć  $V_{in}$  i  $V_{out}$  w postaci:

$$I_N = V_{in} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - V_{out} \frac{1}{R_2} \quad (2)$$

Z właściwości transmisyjnych wzmacniacza CFA wynika, że:

$$I_N = \frac{V_{out}}{Z_T} \quad (3)$$

Przyrównując do siebie prawe strony równań (2) i (3) i wykonując proste przekształcenia otrzymuje się:

$$V_{out} = V_{in} \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{Z_T}} \quad (4)$$

Wstawiając w miejsce  $Z_T$  zależność (1), dzieląc obie strony równania (4) przez  $V_{in}$  i uwzględniając, że  $R_T \gg R_2$  otrzymujemy:

$$A_V = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_T} + j \frac{f}{R_T f_g}} \cong \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_2} + j \frac{f}{R_T f_g}} = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{1 + j \frac{R_2 f}{R_T f_g}} = \frac{A_{V0}}{1 + j \frac{f}{f_{3dB}}} \quad (5)$$

gdzie: 
$$A_{V0} = 1 + \frac{R_2}{R_1} = 41 \left[ \frac{V}{V} \right] \quad (6)$$

jest wzmocnieniem układu z rys. A dla małych częstotliwości (wzmocnienie w pasmie przenoszenia wzmacniacza), natomiast:

$$f_{3dB} = f_g \frac{R_T}{R_2} = 5MHz \quad (7)$$

jest 3-dB pasmem przenoszenia tego wzmacniacza.

**Zad. 3.**

Sygnal analogowy o postaci

$$x(t) = 2 + 2\sin(5 \cdot 10^3 \pi) + \sin(10^4 \pi)$$

ma być przekształcony na postać cyfrową i przesłany torem o przepływności  $64 \cdot 10^3$  symboli na sekundę ( $64 \cdot 10^3$  body). Ile maksymalnie bitów można przeznaczyć na zakodowanie każdej próbki tego sygnału, jeżeli oprócz kodowania wartości próbek zastosuje się dodatkowo kodowanie 2B1Q w celu zamiany otrzymanego sygnału binarnego na czterowartościowy?

**Rozwiązanie**

Podany sygnał analogowy ma widmo dyskretne, a największa częstotliwość tego widma wynosi  $f_g = 5\text{kHz}$ . Z twierdzenia o próbkowaniu wynika, że częstotliwość próbkowania  $f_s$  powinna być przynajmniej dwa razy większa od  $f_g$ , tj:

$$f_s \geq 10 \text{ kHz} \quad (1)$$

Kodowanie 2B1Q daje dwukrotne zwiększenie szybkości binarnej ( $b/s$ ) w porównaniu do szybkości symbolowej ( $body$ ). Oznacza to, że torem o przepustowości symbolowej  $64 \cdot 10^3$  body można przesłać strumień binarny z szybkością nie większą niż:

$$v = 128 \text{ kb/s} \quad (2)$$

Maksymalna liczba bitów, jaką można przeznaczyć na jedną próbkę jest równa części całkowitej liczby  $l$

określonej wzorem:

$$l = \frac{v}{f_{s\min}} = \frac{128 \cdot 10^3}{10^4} = 12,8 \quad (3)$$

Ze wzoru (3) wynika, że na jedną próbkę można przeznaczyć maksymalnie  $n = 12$  bitów.

**Zad. 4**

W układzie pokazanym na rysunku blok o wzmocnieniu  $A$  przedstawia idealny wzmacniacz napięciowy. Cały układ jest natomiast wzmacniaczem transimpedancyjnym. Oblicz rezystancję wejściową  $R_{in} = u_{in} / i_{in}$  dla sygnałów zmiennych, traktując kondensator  $C$  jako zwarcie dla tych sygnałów oraz przyjmując, że tranzystor MOS pracuje w zakresie silnej inwersji, a jego przejściowa charakterystyka statyczna, opisującą zależność prądu drenu  $I_D$  od napięcia bramka-źródło  $U_{GS}$ , jest dana wzorem (1), w którym  $K$  jest współczynnikiem, a  $U_p$  napięciem odcięcia kanału.

$$I_D \cong K(U_{GS} - U_p)^2 \quad (1)$$

**Dane:**

$$K = 2,5 \times 10^{-2} \text{ A/V}$$

$$U_p = 1 \text{ V}$$

$$U_B = 1,2 \text{ V}$$

$$I = 1 \text{ mA}$$

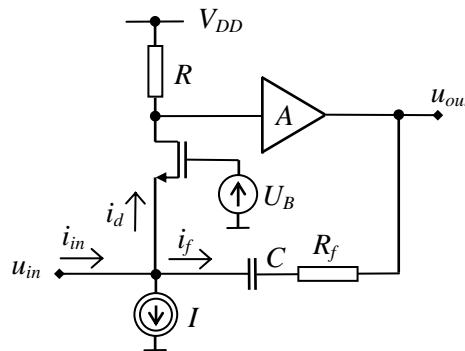
$$A = -10 \text{ V/V}$$

$$R = 1 \text{ k}\Omega$$

$$R_f = 200 \Omega$$

**Szukane:**

$$R_{in} = \frac{u_{in}}{i_{in}} = ?$$

**Rozwiązanie**

W układzie działa ujemne sprzężenie zwrotne (za sprawą rezystora  $R_f$ ) typu napięciowo-równoległego. Sprzężenie takie zmniejsza rezystancję wejściową układu.

Zmienny prąd wejściowy  $i_{in}$  jest sumą zmiennego prądu drenu  $i_d$  tranzystora MOS pracującego w konfiguracji ze wspólnym źródłem i zmiennego prądu  $i_f$  płynącego przez rezystor  $R_f$ .

Prąd  $i_d$  jako funkcja  $u_{in}$  opisany jest wzorem:

$$i_d = \frac{dI_D}{dU_{GS}} u_{in} = g_m u_{in} \quad (2)$$

gdzie pochodna  $dI_D/dU_{GS}$  reprezentuje transkonduktancję  $g_m$  i jest liczona dla funkcji (1) w punkcie  $I_D = I$ . Prowadzi to do wzoru:

$$g_m = 2\sqrt{K} \sqrt{I_D} = 2\sqrt{K} \sqrt{I} = 10 \text{ mS} \quad (3)$$

Prąd  $i_f$  można natomiast wyrazić następująco:

$$i_f = \frac{u_{in} - u_{out}}{R_f} = \frac{u_{in} - g_m u_{in} R A}{R_f} = u_{in} \frac{1 - g_m R A}{R_f} \quad (4)$$

$$\text{Dla podanych wartości składnik} \quad g_m R A = -100 \quad (5)$$

jest dużo większy niż jeden (co do wartości bezwzględnej) i wzór (4) upraszcza się do postaci:

$$i_f = -u_{in} g_m A \frac{R}{R_f} \quad (6)$$

Dodając prądy (2) i (6) otrzymujemy:

$$i_{in} = i_d + i_f = u_{in} g_m \left( 1 - A \frac{R}{R_f} \right) \quad (7)$$

Pomijając w nawiasie po prawej stronie równania (7) jedynkę wobec  $A \frac{R}{R_f} = -50$  można napisać:

$$R_{in} = \frac{u_{in}}{i_{in}} \cong \frac{u_{in}}{-u_{in} g_m A \frac{R}{R_f}} = R_f \frac{-1}{A g_m R} \cong 2 \Omega \quad (8)$$

### Zad. 5.

Charakterystyka przejściowa,  $T = V_{out}/V_{in}$ , układu z rys. A jest pokazana na rys. B. Oblicz szerokość pętli histerezy  $V_h$  tej charakterystyki. Przyjąć, że użyty wzmacniacz operacyjny jest układem idealnym.

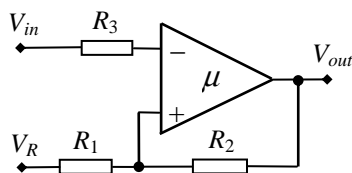
#### Dane:

$$V_R = 6V$$

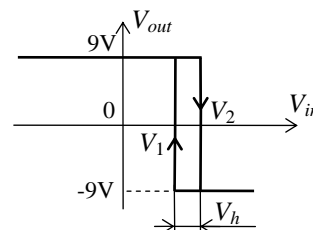
$$R_1 = 1k\Omega$$

$$R_2 = 9k\Omega$$

$$R_3 = 1k\Omega$$



Rys. A



Rys. B

#### Rozwiązanie

Widoczna na rysunku B pętla histerezy ma dwa punktu charakterystyczne,  $V_1$  oraz  $V_2$ . Zmiana napięcia wyjściowego z  $9V$  na  $-9V$  (przy wzroście napięcia  $V_{in}$ ) wymaga przekroczenia przez  $V_{in}$  wartości  $V_2$ . Ruch w przeciwną stronę (przy zmniejszaniu napięcia  $V_{in}$ ) wymaga spadku  $V_{in}$  poniżej wartości  $V_1$ . Zakładając, że wzmacniacz jest idealny, oznaczając przez  $V_P$  stan dodatni napięcia wyjściowego ( $9V$ ), a przez  $V_N$  stan ujemny napięcia ( $-9V$ ), wartości  $V_1$  i  $V_2$  można określić z zasady superpozycji:

$$\text{dla } V_{out} = V_P, \quad V_2 = V_R \frac{R_2}{R_1 + R_2} + V_P \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad (1)$$

$$\text{dla } V_{out} = V_N, \quad V_1 = V_R \frac{R_2}{R_1 + R_2} + V_N \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (2)$$

Szerokość pętli histerezy jest różnicą obu tych napięć i wyraża się wzorem:

$$V_h = V_2 - V_1 = (V_P - V_N) \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 1,8V \quad (3)$$

#### Opracowali :

Dr hab. inż. Felicja Wysocka-Schillak

Dr hab. inż. Ryszard Wojtyna

prof. nadzwyczajny UTP

#### Sprawdzili:

Dr inż. Andrzej Borys

Dr inż. Jarosław Majewski

#### Zatwierdził:

Przewodniczący Rady Naukowej Olimpiady „EUROELEKTRA”

Dr hab. inż. Ryszard Wojtyna  
prof. nadzwyczajny UTP